

Comprensión de la probabilidad en futuros profesores de matemáticas de bachillerato

J. Marcos López-Mojica y José Carlos Ramírez Cruz

Universidad de Colima, México. mojicajm@gmail.com y jose_ramirez29@ucol.mx

Resumen

La investigación se interesa por identificar la comprensión de ideas fundamentales de probabilidad de los futuros profesores de matemáticas del bachillerato. Los elementos del orden epistemológico, cognitivo y social permiten analizar las dificultades en la comprensión de la probabilidad, espacio muestra y variable aleatoria. De orden cualitativa, la pesquisa se desarrolló en cuatro fases: documental, exploratoria, indagatoria y de comprensión. El presente informe concierne a la primera, en la cual se aplicó un cuestionario con cuatro reactivos, orientados al enfoque frecuencial; la técnica de registro de información fue la escritura en papel. De los resultados, en la propuesta institucional de la licenciatura se identificó una tendencia hacia un enfoque más pedagógico, descuidando la parte matemática. De la comprensión se señala una deficiencia en la interpretación de la probabilidad en porcentaje, no pudieron discriminar el espacio muestra e interpretar la probabilidad de eventos independientes.

Palabras clave: probabilidad, bachillerato, formación docente.

Abstract. The qualitative research on interested in understanding fundamental ideas of probability of future high school math teachers. The elements of the epistemological, cognitive and social order possible to analyze the difficulties in understanding the ideas of probability, sample space, random variable. The instrument was a questionnaire with four items, frequency -oriented approach, the information recording technique was writing on paper. From the results, the institutional proposal degree a trend towards a more educational approach was identified, neglecting the mathematical part. Understanding of a deficiency in the interpretation of probability in percentage identified, could not discriminate and interpret the space it shows the probability of independent events.

Key words: probability, high school, teacher training.

Planteamiento del problema

La reciente reforma educativa en México pretende que los estudiantes de educación básica desarrollen competencias (Secretaría de Educación Pública, 2011) que les permitan resolver problemas de su vida cotidiana. En ese sentido, un reto importante para los docentes es proponer a los niños actividades de enseñanza apropiadas para el logro de ese objetivo, además afrontar ese reto requiere que los primeros dominen el contenido matemático respectivo.

Recientes investigaciones han documentado el escaso y discontinuo tratamiento de los temas de probabilidad y de estadística (estocásticos) en el sistema educativo nacional mexicano, desde el nivel preescolar hasta el superior (Ojeda, 1994; Limón, 1995; de León, 2002; Carballo, 2004; Elizarraras, 2004; Rivera, 2011; Salcedo, 2013).

Para el caso del nivel bachillerato, Salcedo (2013) investigó las características de la comprensión de ideas fundamentales de probabilidad de estudiantes de un bachillerato tecnológico. La propuesta institucional de ese nivel educativo para la enseñanza de estocásticos no considera al enfoque frecuencial. En la aplicación de un cuestionario los estudiantes no mostraron un razonamiento probabilístico y sus desempeños en entrevistas exhibieron la influencia del enfoque determinista. Ese resultado atañe también a la docencia, ya que la falta de su formación en estocásticos deriva en sesgos del pensamiento que se arraigan con el tiempo y son de más en más difíciles de erradicar.

El informe que se presenta es parte de un proyecto de investigación que se interesó por identificar y caracterizar la comprensión de las ideas fundamentales de probabilidad de los futuros docentes de matemáticas del bachillerato. Se pretende responder a la pregunta ¿Qué caracteriza a la comprensión de ideas fundamentales de probabilidad de los futuros docentes de matemáticas del bachillerato? El objetivo es identificar las dificultades en la comprensión de ideas fundamentales de probabilidad de futuros docentes de matemáticas, con miras al diseño de un marco de referencia para el planteamiento de actividades de enseñanza de ese tema en el nivel educativo en cuestión.

Elementos teóricos

El presente documento considera la interrelación de *tres ejes rectores* (Ojeda, 2006): epistemológico, cognitivo y social. En el orden *epistemológico* se considera la propuesta de Heitele (1975) de diez ideas fundamentales de estocásticos como guía para un curriculum en espiral, que parta de un plano intuitivo y arribe a un plano formal. Para este autor una idea fundamental va a ser aquella que permita al individuo establecer modelos explicativos tan eficientes como sean posibles y que no difieren, en los distintos niveles, sobre el contenido sino sólo en su forma de presentarlas (Heitele, 1975). Las ideas fundamentales son: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra.

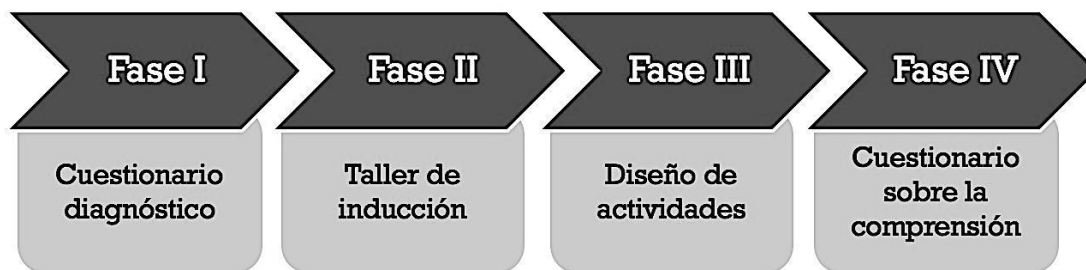
En el *cognitivo* se señala que la intuición de frecuencia favorece el desarrollo del pensamiento probabilístico del niño (Fischbein, 1975). Para el autor, la intuición de frecuencia relativa se desarrolla naturalmente “como consecuencia del hecho de que el individuo vive en un entorno caracterizado por fenómenos estocásticos” (p. 58). El individuo adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo, aunque sus respuestas no llegan a coincidir totalmente con la frecuencia de los mismos. “Esta conducta también se puede obtener sin que se estimule al niño cuando acierta, lo que demuestra que este fenómeno es una formación cognitiva mental” (Fischbein, 1975, p. 58).

El eje *social* concierne al marco institucional del nivel medio superior. Es importante tomar en cuenta las interacciones resultantes del proceso educativo. En ese sentido, Steinbring (2005) considera que para la adquisición de un concepto matemático es necesaria la interacción entre éste, el objeto y el signo. En este mismo eje se consideran los niveles de meta-conocimiento del profesor: el conocimiento estocástico en relación a su nivel personal, el nivel didáctico, el nivel de enseñanza y el nivel de aprendizaje (Steinbring, 1998).

Método

La investigación de tipo cualitativa (Vasilachis, 2006) y *en curso*, se desarrolló en cuatro fases (véase la figura 1). En la *primera fase* se aplicó un cuestionario diagnóstico, para identificar las nociones de probabilidad de los estudiantes de la licenciatura en enseñanza media con especialidad en matemáticas. En la *segunda fase* se implementó un taller de inducción al tema de estocásticos y la resolución de problemas. En la *tercera fase* se prevé el diseño e implementación de actividades de enseñanza de la probabilidad por parte de los estudiantes de licenciatura asistentes al taller y el análisis conjunto de ese proceso de enseñanza. En una *cuarta fase* se pretende la aplicación de un cuestionario que permita identificar la comprensión de las ideas fundamentales de probabilidad después de la enseñanza de esos temas. Para este informe se presentan los resultados de la primera fase. Se aplicó un cuestionario diagnóstico, para identificar nociones de probabilidad de futuros docentes de matemáticas del bachillerato.

Figura 1
Organización de la investigación en curso.



Nota: Tomado de Ojeda, 2006.

Para las cuatro fases se utilizan los criterios de la *célula de análisis* (Ojeda, 2006), que integran elementos teóricos y de método para caracterizar los procesos de enseñanza, éstos son: situación o contexto, ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos que refieren a estocásticos.

Instrumento y técnica de registro de datos

Se diseñó un cuestionario diagnóstico de cuatro reactivos (Salcedo, 2013). Los datos recopilados se registraron mediante la escritura en papel. Los reactivos estaban enfocados en la comprensión del espacio muestra, medida de probabilidad y en la comparación de probabilidades (anexo), a éstos se les aplicó los cinco criterios de análisis (Tabla 1).

Tabla 1
Caracterización de los reactivos.

	Reactivo 1	Reactivo 2	Reactivo 3	Reactivo 4
Situación	Lanzamiento de monedas y dados	Estado del tiempo	Lanzamiento de dados ordinarios	Juego del cual tiene que tomar una decisión
Ideas fundamentales de estocásticos	Medida de probabilidad, espacio muestra, regla del productos, independencia.	Medida de probabilidad, espacio muestra	Medida de probabilidad, adición de probabilidades, espacio muestra, variable aleatoria	Medida de probabilidad, espacio muestra, regla del producto, independencia, variable aleatoria.
Otros conceptos matemáticos	Fracción, número natural	Porcentaje	Adición, número natural	Geometría
Recursos semióticos	Diagrama de árbol	---	Diagrama de árbol	Ruletas
Términos empleados	Evento, probable, caiga, lanzamientos, volado.	Probabilidad, pronóstico	Lanzan, probabilidad, suma, igual, mayor	Ruleta, juego, ganar, girar, probabilidad

Nota: Se aplicó el cuestionario a 20 estudiantes (20-22 años) de la Licenciatura en Educación Media Especializada en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Universidad de Colima.

Primeros resultados

Se consideró pertinente investigar en la Licenciatura por el modelo educativo que presenta, pues según la tira de materias, la mayor carga se encuentra hacia lo pedagógico y se descuida el enfoque hacia las matemáticas y la didáctica de éste.

Por otra parte, en los cuestionarios los estudiantes presentaron dificultades para interpretar la probabilidad en porcentaje. Tuvieron problemas en identificar la probabilidad de eventos independientes. Algunos estudiantes no discriminaron el espacio muestra de un fenómeno aleatorio.

Sobre la propuesta institucional

A partir del 2002 la Licenciatura en Enseñanza Media Especializada en Matemáticas pasó a ser escolarizada. El objetivo de la licenciatura es la formación de profesores de matemáticas que incidan en el bachillerato. De un análisis reciente, resultó que esta licenciatura está enfocada a la educación y que ofrece cierta especialización en el área de matemáticas, en este caso en el nivel medio superior (Aké, López-Mojica, Martínez, 2015). Lo anterior se puede identificar en el mapa curricular de la licenciatura (Figura 2).

La materia “Probabilidad y estadística aplicada a la educación” se cursa en el sexto semestre. Entre los propósitos de la materia se encuentran (Universidad de Colima, 2002; p. 180):

- Explorar las nociones frecuencial y clásica de la probabilidad a través de actividades muy diversas, así como realizar diagramas de árbol para enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria.
- Aplicar las nociones frecuencial y clásica de la probabilidad, así como la idea de simulación, para resolver problemas. Asimismo, realiza las reglas de la suma y los cálculos con probabilidades.

Es de notar que los propósitos de la materia sugieren un nivel operativo, es decir, se limitan sólo a la aplicación de *reglas* de la probabilidad y se descuida la comprensión de ésta. Además, pareciera que, a pesar de mencionar conceptos

matemáticos, el enfoque es meramente determinista: “realizar diagramas de árbol para enumerar los posibles” (Universidad de Colima, 2002, p. 180).

Figura 2
Mapa curricular.

Sem	MATERIAS					
1	Historia General de las Matemáticas	Estrategias Para el Estudio y la Comunicación	Bases Filosóficas y Legales y Organizativas del Sistema Educativo Mexicano	Problemas y Políticas de la Educación Básica y Media Superior	Informática	Inglés I
2	Aritmética Elemental	Introducción a la Enseñanza de las Matemáticas	Ética y Valores	Didáctica General	Formación docente	Inglés II
3	Aritmética Superior	Álgebra Elemental	Geometría Plana y del Espacio	Didáctica de las Matemáticas	Observación y Práctica Docente I	Inglés III
4	Trigonometría	Álgebra Superior	Geometría no Euclidiana	Planeación de la Enseñanza y Evaluación del Aprendizaje	Observación y Práctica Docente II	Inglés IV
5	Geometría Analítica	Cálculo Diferencial	Geometría Descriptiva y Dibujo de Proyecciones	Conocimiento de los adolescentes I	Observación y Práctica Docente III	Inglés V
6	Temas Selectos de Matemáticas	Cálculo Integral	Probabilidad y Estadística Aplicada a la Educación	Conocimiento de los adolescentes II	Observación y Práctica Docente IV	Inglés VI
7			Seminario I	Taller de Diseño de Propuestas Didácticas y Análisis del Trabajo Docente I	Trabajo Docente I	Inglés VII

Nota: Tomado de la licenciatura en enseñanza media especializada en matemáticas (Universidad de Colima, 2002).

Sobre el cuestionario

Como ya se adelantó en líneas anteriores, los estudiantes presentan dificultades en la interpretación de la probabilidad en porcentaje (enfoque frecuencial). El **reactivo 2** “Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%, ¿qué significa este pronóstico?” tiene la finalidad de identificar la comprensión del enfoque frecuencial. Las respuestas de 16 estudiantes sugieren un acercamiento sólo al evento “llueva mañana”, fueron cuatro estudiantes los que sus argumentos se aproximaron al enfoque frecuencial (Figura 3).

Figura 3
Respuesta que evoca al enfoque frecuencial.

2. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%, ¿qué significa este pronóstico? que existe una probabilidad de 70 de 100 de que llueva;

La respuesta de un estudiante refirió al complemento del evento, pero agregó otros aspectos como “el cielo está nublado” (véase figura 4).

Figura 4

Respuesta que evoca al enfoque frecuencial.

2. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%, ¿qué significa este pronóstico? que el cielo está nublado y con un alto grado de precipitación, pero no es seguro que llueva ya que hay un 30% de probabilidad de que no se cumpla el anuncio

Por otro lado, existieron respuestas en las que no hubo más información sobre la comprensión del enfoque frecuencial, pero sí nociones del espacio muestral (Figura 5).

Figura 5

Respuesta que evoca al espacio muestral.

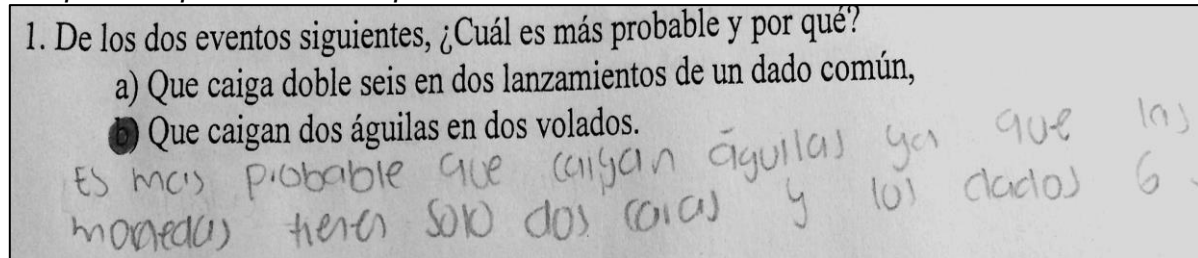
2. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%, ¿qué significa este pronóstico? que es más probable que el día de mañana llueva, pero no es totalmente seguro.

El **reactivo 1** tiene como objetivo identificar si el estudiante discrimina el espacio muestral y compara las probabilidades de los eventos para tomar una decisión. Las respuestas de 18 estudiantes se enfocaron sólo a las características de los objetos más que a compararlos.

Por ejemplo en la siguiente respuesta, el estudiante se enfoca sólo a la cardinalidad del evento, refiere sólo al número de “águilas” y a las “caras de los dados” como una forma de comprar las opciones y tomar una decisión (Figura 6).

Figura 6

Respuesta que evoca al espacio muestra.



Discusión

Se identificaron problemas como la ausencia de la idea del enfoque frecuencial de la probabilidad, pues las respuestas de los estudiantes no se referían a “tanto de cien”. En ese sentido los estudiantes tienden a interpretar el porcentaje como una cantidad y no como una relación entre eventos favorable con el total de eventos posibles. También se pudieron identificar problemas en la comparación de probabilidades de un evento y en la discriminación del espacio muestra. Interpretan a la probabilidad como una cantidad más que como una relación.

Conclusiones

La negligencia hacia los temas de probabilidad en el nivel básico dificulta identificar aspectos importantes del pensamiento probabilístico a tomar en cuenta en el planteamiento de actividades para su introducción en el nivel bachillerato. Cuando ésta se enseña, el énfasis desmedido en el cálculo provoca que se pase por alto la naturaleza de las situaciones a las que se le aplica. Por ejemplo, Mevarech (1983) identifica un modelo de estructura profunda de estudiantes de licenciatura en problemas de estadística. Argumenta que los alumnos presentan una concepción errónea respecto al concepto de media; aplican las propiedades de grupo (principalmente la distributiva) en los problemas del cálculo de la media y de la media ponderada.

En ese sentido, los estudiantes participantes del estudio aun no han desarrollado un pensamiento probabilístico, pues en sus argumentos aun persiste la referencia a la cardinalidad del evento y al espacio muestra. De lo anterior se puede justificar que en la comprensión de los futuros profesores de matemáticas del nivel bachillerato, aun persisten rasgos el pensamiento determinista.

Referencias

- Aké, L. P., López-Mojica, J. M. y Martínez, C. (2015). Formación inicial del profesor de matemáticas en México. El análisis de un caso. (En prensa) *XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, EIME, Oaxaca, México.
- Carballo, M. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la Educación Primaria: Determinismo y azar*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav del IPN, México.
- De León, J. (2002). *Comprensión de la ley de los grandes números de estudiantes de Ciencias Sociales*. (Tesis de Doctorado inédita). DME, Cinvestav del IPN, México.
- Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holanda: Reidel.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6, 2, 187-205.
- Limón, A. (1995). *Elementos para el Análisis Crítico de la Posible Inserción Curricular de Nociones Estocásticas, Ausentes en Programas de Preescolar y Primaria*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*. 14, 1, 415-429.
- Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. (Tesis de doctorado inédita). King's College London. UK.

- Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, treinta años*. México: Santillana.
- Rivera, S. (2011). *Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en el bachillerato universitario*. (Tesis de maestría inédita). DME, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Salcedo, J. (2013). *Razonamiento probabilístico en el bachillerato tecnológico*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional. México
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes de estudios 2011. Educación Básica*. México: Secretaria de Educación Pública.
- Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 1, 1, 157-189.
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.
- Universidad de Colima (2002). *Licenciatura en Educación Media Especializada en Matemáticas*. Universidad de Colima. México.
- Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.

Anexo 1**Instrumento****Nombre:** _____**Edad:** _____**Contesta a cada inciso y justifica cada una de tus respuestas**

1. De los dos eventos siguientes, ¿Cuál es más probable y por qué?

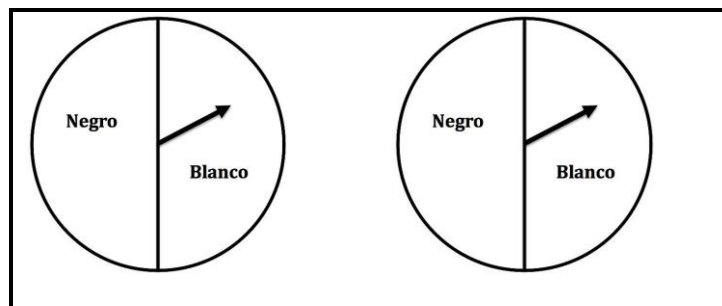
- a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común,
- b) Que caigan dos águilas en dos volados.

2. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%, ¿qué significa este pronóstico?

3. Se lanzan al mismo tiempo dos dados ordinarios, Determina la probabilidad de:

- a) que la suma de sus puntos sea igual a 5,
- b) que la suma de sus puntos sea mayor a 9.

4. Pedro y Carmen van a la feria. Se detienen en un puesto donde están las siguientes ruletas:



En el juego se gana, sólo si ambas flechas se detienen en negro después de girarlas. Pedro considera que se tiene una probabilidad de 50-50 de ganar, ¿estas de acuerdo? ¿Por qué?